Turbine Pelton - Théorie

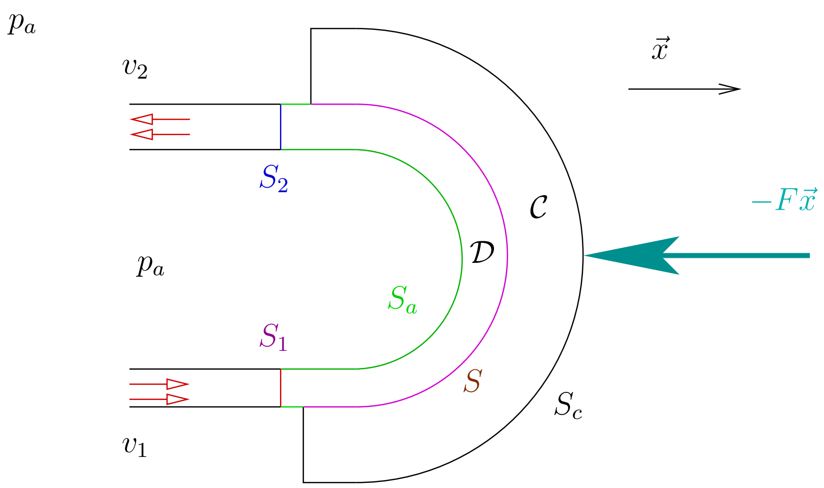
28 novembre 2008

On va considérer l'écoulement qui vient frapper un auget simple à 180°. On considère un problème plan et l'action de la pesanteur n'est pas prise en compte.

Un liquide, de masse volumique ρ, de vitesse constante $v_1\vec{x}$ vient frapper l'auget circulaire pour ressortir à la vitesse constante $-v_2\vec{x}$.

1 Auget immobile

On souhaite connaître la force nécessaire pour maintenir l'auget immobile.



On nomme $\mathcal{D}$ le domaine fluide en contact avec l'auget. Le contour de ce domaine est $\partial\mathcal{D} = S_1 + S_2 + S + S_a$ où :

- S_1 : section d'entrée du fluide ;
- S_2 : section de sortie du fluide ;
- S : surface de contact entre l'eau et l'auget ;
- S_a : surface de contact entre l'eau et l'air.

La conservation de la masse donne le débit massique de liquide qui vient frapper l'auget :

$$q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$$

L'écoulement dans les sections S_1 et S_2 est unidirectionnel : la pression y varie de façon hydrostatique. L'eau est à la pression atmosphérique dans les sections S_1 et S_2 (mais pas au niveau de la surface de contact S entre l'eau et l'auget).

$$p_1 \approx p_a \quad \text{et} \quad p_2 \approx p_a$$

Le théorème de Bernoulli s'écrit sur le tube de courant 1-2 :

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2$$

En isolant $\mathcal{D}+\mathcal{C}$, le théorème d'Euler donne :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} &= \iint_{\partial(\mathcal{D}+\mathcal{C})} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1+S_2} \rho\vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_{S_1} \rho v_1\vec{x}(v_1\vec{x}\cdot(-\vec{x}))\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \rho(-v_2\vec{x})((-v_2\vec{x})\cdot(-\vec{x}))\,\mathrm{d}S \\
&= -\rho v_1^2 S_1\vec{x} - \rho v_2^2 S_2\vec{x} = -q_m(v_1+v_2)\vec{x} = -2q_m v_1\vec{x}
\end{aligned}$$

Remarquons que si le retour du fluide s'effectue à 90° on obtient :

$$\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} = -q_m v_1\vec{x}$$

et que si le retour du fluide s'effectue à un angle α compris entre 90° et 180°, on obtient :

$$\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} = -(1+|\cos\alpha|)q_m v_1\vec{x}$$

donc en particulier pour $\alpha = 90° + 54.7°$:

$$\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} = -1.816\,q_m v_1\vec{x}$$

Enumérons les actions exercées sur $\mathcal{D}+\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} &= -F\vec{x} + \iint_{S_1} -p_1\vec{n}\mathrm{d}S + \iint_{S_2} -p_2\vec{n}\mathrm{d}S + \iint_{S_a+S_c} -p_a\vec{n}\mathrm{d}S \\
&= -F\vec{x} + \underbrace{\iint_{S_a+S_1+S_2+S_c} -p_a\vec{n}\mathrm{d}S}_{=\vec{0}}
\end{aligned}$$

On obtient alors la norme de la force effective exercée par le fluide sur l'auget $\mathcal{C}$ c-à-d la force exercée par le fluide et l'air sur l'auget (dans le cas où le retour s'effectue sur 180° :

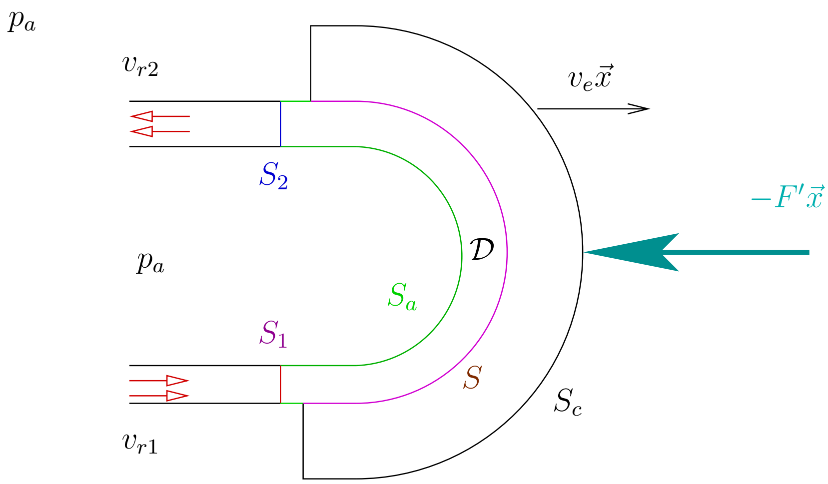
2 Auget mobile en translation à vitesse constante

On souhaite connaître la force nécessaire $-F'\vec{x}$ pour maintenir l'auget $(\mathcal{C})$ à la vitesse (d'entrainement) $\vec{V}_e = v_e\vec{x}$ constante.

L'écoulement est permanent vu du repère fixe par rapport à l'auget donc vu du repère mobile par rapport au sol : ce repère est le repère relatif.

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_e + \vec{V}_{r1} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_e + v_{r1}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_e + \vec{V}_{r2} \quad \Longrightarrow \quad -v_2 = v_e - v_{r2} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = v_{r2} - v_e$$



La conservation de la masse (dans le repère mobile) donne le débit massique de liquide qui vient frapper l'auget :

$$q_{mr} = \rho S_1 v_{r1} = \rho S_2 v_{r2}$$

L'écoulement dans les sections S_1 et S_2 est toujours unidirectionnel : $p_1 = p_2 = p_a$.

Le théorème de Bernoulli s'écrit, en écoulement relatif, sur le tube de courant 1-2 :

$$p_1 + \rho\frac{v_{r1}^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_{r2}^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad v_{r1} = v_{r2} \quad\Longrightarrow\quad v_2 = v_{r2} - v_e = v_{r1} - v_e = v_1 - 2v_e$$

En isolant $\mathcal{D}+\mathcal{C}$, le théorème d'Euler donne (dans le cas où le retour s'effectue sur 180°) :

$$\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} = \iint_{\partial(\mathcal{D}+\mathcal{C})} \rho\vec{V}_r(\vec{V}_r\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \ldots = -2q_{mr}v_{r1}\vec{x}$$

Enumérons les actions exercées sur $\mathcal{D}+\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext\to(\mathcal{D}+\mathcal{C})} &= -F'\vec{x} + \iint_{S_1} -p_1\vec{n}\mathrm{d}S + \iint_{S_2} -p_2\vec{n}\mathrm{d}S + \iint_{S_a+S_c} -p_a\vec{n}\mathrm{d}S \\ &= -F'\vec{x} + \underbrace{\iint_{S_a+S_1+S_2+S_c} -p_a\vec{n}\mathrm{d}S}_{=\vec{0}}\end{aligned}$$

On obtient alors la norme de la force effective exercée par le fluide sur l'auget $\mathcal{C}$ c-à-d la force exercée par le fluide et l'air sur l'auget :

$$F' = 2q_{mr}v_{r1} = 2\rho S_1 v_{r1}^2 = 2\rho S_1(v_1 - v_e)^2$$

On remarque :

- que $F' = F$ si $v_e = 0$;
- que $F' = 0$ si $v_e = v_1$ et même si $v_e > v_1$ car alors le fluide n'agit plus sur l'auget.

Cette force F' développe la puissance :

$$\mathcal{P} = F'v_e = 2\rho S_1 v_e(v_1 - v_e)^2$$

qui est extrême si :

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial v_e} = 0 \quad\Longrightarrow\quad (v_1 - v_e)^2 - 2v_e(v_1 - v_e) = 0 \quad\Longrightarrow\quad (v_1 - v_e)(v_1 - v_e - 2v_e) = 0$$

et maximale si :

$$\Longrightarrow\quad v_1 = 3v_e \quad\Longrightarrow\quad v_e = \frac{v_1}{3}$$

On a alors :

$$v_{r1} = v_1 - v_e = \frac{2v_1}{3} \qquad\text{et}\qquad v_2 = v_{r2} - v_e = v_{r1} - v_e = \frac{v_1}{3}$$

La puissance maximale est alors :

$$\mathcal{P} = 2\rho S_1\frac{v_1}{3}\left(\frac{2v_1}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}\frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3$$

alors que la puissance du jet de débit volumique $q_v = S_1 v_1$ et de vitesse v_1 est :

$$\mathcal{P}_0 = q_v\rho\frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3$$

On a donc un rendement pour cette transmission de puissance de :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \frac{16}{27} \approx 0.592$$

La perte de puissance provient du fait :

- que le fluide sort de l'auget en S_2 avec une vitesse donc une puissance qui est alors perdue ;
- que le débit absolu q_v n'atteind pas totalement l'auget car c'est le débit relatif q_{vr} qui l'atteind.

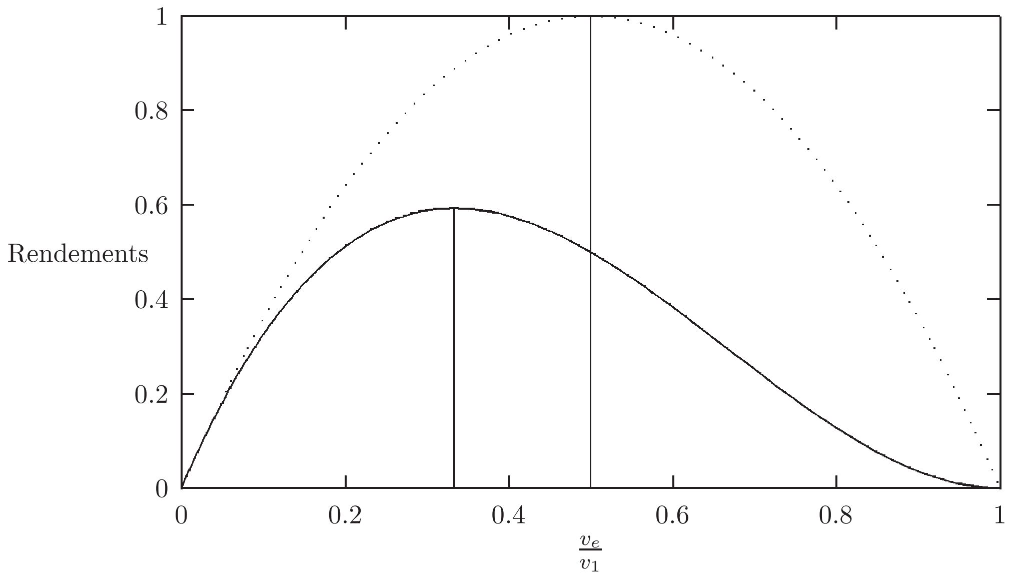


FIG. 1 – Rendements théoriques pour un auget en translation (trait plein) et pour une turbine Pelton (trait pointillé)

3 Utilisation de cette théorie sur une turbine Pelton

Considérons une turbine Pelton munie d'une infinité d'augets ce qui fait que l'écoulement peut théoriquement être considéré comme permanent vu du sol.

Utilisons l'équation du moment du **P.F.D.** en régime permanent :

$$\iint_{\partial\mathcal{D}(t)} \rho\vec{OM} \wedge \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \vec{\mathbb{M}}(O, ext \rightarrow \mathcal{D}(t))$$

En considérant les sections en 1, 2 et 2' infiniment petite (pour éviter de faire des intégrales) et en considérant le domaine $\mathcal{D}$ comme la roue Pelton et l'eau située entre les sections 1,2 et 2' qui sont des sections fixes par rapport au sol (en supposant une infinité d'augets) :

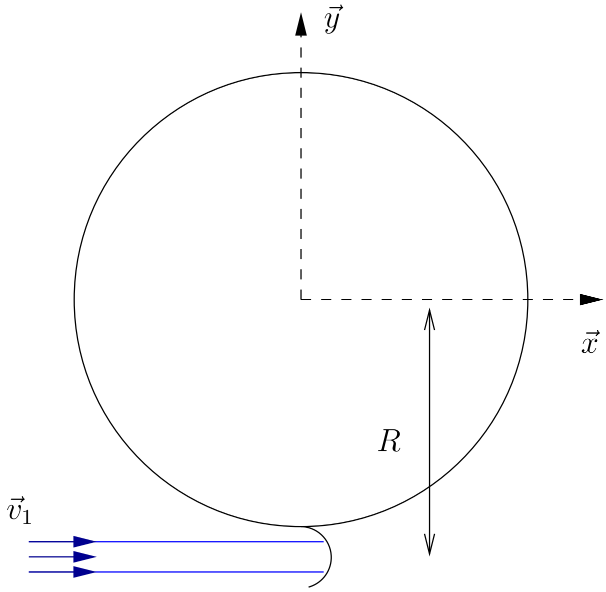
$$\iint_{S_1+S_2+S_2'} \rho\vec{OM} \wedge \vec{V}(\vec{V}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \vec{\mathbb{M}}(O, ext \rightarrow \mathcal{D}(t))$$

- Sur S_1 : $\vec{V} = v_1\vec{x}$, $\vec{n} = -\vec{x}$ et $\vec{OM} \approx -R\vec{y}$
- Sur S_2 : $\vec{V} = -v_2\vec{x}$, $\vec{n} = -\vec{x}$ et $\vec{OM} \approx -R\vec{y} - a\vec{z}$
- Sur S_2' : $\vec{V} = -v_2\vec{x}$, $\vec{n} = -\vec{x}$ et $\vec{OM} \approx -R\vec{y} + a\vec{z}$

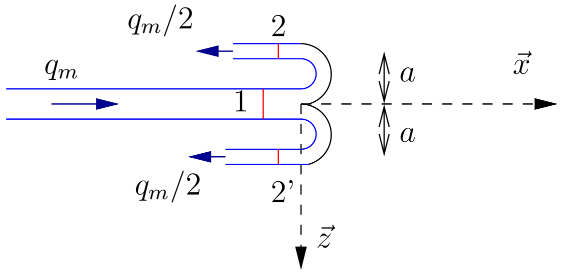
$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{M}}(O, ext \rightarrow \mathcal{D}(t)) &= \rho(-R\vec{y} \wedge v_1\vec{x})(-v_1)S_1 \\
&\quad +\rho(-R\vec{y} - a\vec{z}) \wedge (-v_2\vec{x})v_2S_2 + \rho(-R\vec{y} + a\vec{z}) \wedge (-v_2\vec{x})v_2S_2 \\
&= \underbrace{\rho v_1 S_1}_{q_m}(-Rv_1\vec{z}) + 2\,\underbrace{\rho v_2 S_2}_{q_m/2}(-Rv_2\vec{z}) \\
&= -q_m R(v_1 + v_2)\vec{z}
\end{aligned}$$

Or :

$$\vec{\mathbb{M}}(O, ext \rightarrow \mathcal{D}) = \underbrace{\vec{\mathbb{M}}(O, pes \rightarrow \mathcal{D})}_{\approx\vec{0}} + \underbrace{\vec{\mathbb{M}}(O, air \rightarrow \mathcal{D})}_{\approx\vec{0}} + \underbrace{\vec{\mathbb{M}}(O, recepteur \rightarrow roue)}_{-\mathcal{C}_m\vec{z}}$$



Débits absolus



D'où le couple moteur fourni par la roue :

$$\mathcal{C}_m = q_m R(v_1 + v_2)$$

et la puissance récupérée sur l'arbre de la roue Pelton qui tourne à la vitesse de rotation $\Omega = \frac{v_e}{R}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}_m \Omega = \mathcal{C}_m \frac{v_e}{R} = q_m(v_1 + v_2)v_e$$

En revenant aux calculs de l'auget en translation[1] on a : $v_2 = v_1 - 2v_e$; donc en supprimant v_2 de l'expression de $\mathcal{P}$ on obtient :

$$\mathcal{P} = q_m(v_1 + v_1 - 2v_e)v_e = 2q_m(v_1 - v_e)v_e = 2\rho S_1 v_1 (v_1 - v_e)v_e$$

Et l'on peut s'intéresser à connaître la vitesse v_e qui permet de récupérée le maximum de puissance :

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial v_e} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -v_e + (v_1 - v_e) = 0 \text{ soit } v_e = \frac{v_1}{2}$$

et cette puissance maxi est :

$$\mathcal{P}_{Maxi} = 2\rho S_1 v_1 \frac{v_1}{2}\frac{v_1}{2} = \frac{1}{2}\rho S_1 v_1^3 = \mathcal{P}_0$$

On récupère alors toute la puissance du jet ... à condition :

[1]Nous effectuons là aussi une hypothèse qui sera d'autant plus vérifiée que le rayon de la roue Pelton sera élevée (ce qui n'est pas le cas de notre manip')

- **d'avoir une infinité d'augets,**
- **de faire tourner la roue à la vitesse de rotation convenable $\Omega = \frac{v_e}{R} = \frac{v_1}{2R}$,**
- **de négliger les pertes singulières dans le fluide entre les sections S_1 et S_2,**
- **de négliger les effets de la pesanteur,**
- **de négliger les pertes par frottements dans les paliers assurant la liaison pivot de l'arbre par rapport au bâti,**
- **pour un retour à $180°$.**

On peut revenir à l'expression du couple $\mathcal{C}_m$:

$$\mathcal{C}_m = q_m R(v_1 + v_2) = q_m R(v_1 + v_1 - 2v_e) = 2q_m R(v_1 - v_e) = 2q_m R v_1 (1 - \frac{v_e}{v_1}) = 2q_m R v_1 (1 - \frac{R\Omega}{v_1})$$

Le couple sera maximum lorsque la vitesse de rotation de l'arbre sera nulle :

$$\mathcal{C}_{m\,Maxi} = 2q_m R v_1$$

et sera de moitié lorsque la puissance sera maximum c-à-d à la vitesse de rotation $\omega_0 = \frac{v_1}{2R}$

$$\mathcal{C}_{m\,0} = \mathcal{C}_m(\omega_0) = q_m R v_1$$

4 Application numérique

- Débit volumique d'alimentation (de l'ensemble) des jets alimentant la turbine[2] : q_v ;
- Diamètre du jet : D ;
- Section du jet : $S_1 = \frac{\pi}{4} D^2$;
- Vitesse de l'eau en sortie du jet : v_1 ;
- Puissance de l'eau en sortie du jet et puissance maximum récupérable : $\mathcal{P}_0 = q_v \rho \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho S_1 v_1^3$
- Distance entre l'axe de l'arbre et le point d'impact de l'eau sur l'auget : $R \approx 75$ mm ;
- Vitesse de rotation où l'on peut prétendre récupérer le maximum de puissance : $\omega_0 = \frac{v_1}{2R}$
- Vitesse de rotation maximum (où l'on récupèrera une puissance nulle) : $\omega_{Maxi} = 2\omega_0 = \frac{v_1}{R}$
- Couple maximum récupéré (à vitesse de rotation nulle) : $\mathcal{C}_{m\,Maxi} = 2q_m R v_1$
- Couple récupéré à puissance maximum : $\mathcal{C}_{m\,0} = q_m R v_1$

Voici différentes variantes d'application numérique :

					DeltaLab
q_v (l/mn)	20	40	40	60	135
D (mm)	6	6	10	6	11 ?
v_1 (km/h)	42	85	31	127	85
$\mathcal{P}_0$ (W)	23	185	24	625	630 = 378/60%
ω_{Maxi} (tr/mn)	1501	3002	1081	4503	4522
$\mathcal{C}_{m\,Maxi}$ (Nm)	0.589	2.358	0.849	5.305	-

[2] En théorie, qu'il y ait 1 jet de débit q_v ou 2 jets de débit $\frac{q_v}{2}$, cela ne change pas la puissance récupérer. L'avantage de plusieurs jets est de pouvoir annuler la force radiale exercée sur l'arbre.